170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications

Cadre: K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$.
E est un K-ev de dimension finie $n \geq 1$, et E^* est le dual de E.
$\mathcal{B}$ est une base de E.

I. Forme bilinéaire symétrique. Forme quadratique.

1) Forme bilinéaire symétrique

Déf. 1: Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \to K$ telle que: $\forall x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y) \in E^*$
. $\forall y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y) \in E^*$

Elle est dite symétrique si: $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

Ex. 2: $(A,B) \mapsto Tr(AB)$, $(A,B) \mapsto Tr({}^tAB)$ sont des formes bilinéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Notation 3: φ désignera dorénavant une forme bilinéaire symétrique sur E

[Gou] Déf./Prop 4: . On note $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$. La matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est $M = Mat_{\mathcal{B}}\, \varphi = (\varphi(e_i,e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(K)$. Soit $x,y \in E$. Si on note
295 $X = Mat_{\mathcal{B}}\, x$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}\, y$, alors $\varphi(x,y) = {}^tX M Y$.
297 . Si $j : E \to E^*$, $y \mapsto \varphi(\cdot,y)$ et $\mathcal{B}^*$ est la base duale de $\mathcal{B}$, $M = Mat(j, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$.

Prop. 5: Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
296 Alors $Mat_{\mathcal{B}'}\, \varphi = {}^tP (Mat_{\mathcal{B}}\, \varphi) P$.

Déf./Prop. 6: On notera $M = Mat_{\mathcal{B}}\, \varphi$ et j est l'application de Déf/Prop 4
296 + 297 1) Le rang de φ est $rg(\varphi) = rg(M) = rg(j)$, le déterminant de φ est $\det \varphi = \det M$
2) Le noyau de φ est $Ker\, \varphi = \{x \in E / \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$. $Ker\, \varphi \simeq Ker\, M$.
3) φ est dite non dégénérée si $Ker\, \varphi = \{0\}$, dégénérée sinon.
4) Si φ est non dégénérée, le discriminant de φ est $\delta(\varphi) = \det M \mod K^{*2}$ où $K^{*2} = \{t^2, t \in K^*\}$. Si φ est dégénérée, $\delta(\varphi) = 0$.

Ex. 7: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Alors $Mat_{\mathcal{B}}\, \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, φ est non dégénérée, $\det \varphi = 2$ et $\delta(\varphi) = 1$.

2) Forme quadratique

Déf. 8: Une application $q : E \to K$ est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire φ sur E telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ $\forall x \in E$.

Prop. 9: (identité de polarisation) [Gou]
Soit q une forme quadratique et φ telle que $q(x) = \varphi(x,x)$. Alors: 300
$\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)] = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$

Coro 10: Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x,x)$. On l'appelle forme polaire de q.

Ex 11: $q : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 + x_2^2$ est de forme polaire φ de Ex 7.

Coro 11: Une forme quadratique q sur $(E, \mathcal{B})$ est un polynôme homogène 299
de degré 2: $q(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(e_i,e_j) x_i x_j$

Notation 12: q désignera dorénavant une forme quadratique sur E.

Déf. 13: Soit φ la forme polaire de q. Le rang, déterminant, noyau, matrice 302
et discriminant de q sont ceux de φ.
Le cône isotrope de q est $\mathcal{C}_q = \{x \in E / q(x) = \varphi(x,x) = 0\}$. Un vecteur $x \in \mathcal{C}_q$ est dit isotrope.

Prop. 14: $Ker\, q \subset \mathcal{C}_q$ 303

Rq. 15: La réciproque est fausse. Si $q : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 - x_2^2$, $Ker\, q = \{0\}$ mais $\mathcal{C}_q = \{(t, \pm t), t \in \mathbb{R}\}$

Déf. 16: Si $\mathcal{C}_q = \{0\}$, q est dite définie. 302
Si $K = \mathbb{R}$ et $q(x) \geq 0$ $\forall x \in E$, q est dite positive. Une forme bilinéaire symétrique définie positive est appelée un produit scalaire (euclidien).

Ex: $A \mapsto Tr({}^tAA)$ est définie positive.

II. Réduction. Classification. Orthogonalité.

1) Bases orthogonales

Cadre : q est une forme quadratique de forme polaire φ.

Déf. (17) : $x, y \in E$ sont dits q-orthogonaux (ou orthogonaux s'il n'y a pas d'ambiguïté) si $\varphi(x,y)=0$.

[Gri] Déf. (18) : $\mathcal{B}=(e_1 \dots e_n)$ est dite (q-) orthogonale si $\varphi(e_i,e_j)=0 \ \forall i \neq j$.
304 Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i,e_j)=\delta_{ij} \ \forall 1 \leq i,j \leq n$.

Rq (19) : $\mathcal{B}$ est q-orthogonale ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q$ est diagonale.

305 Th. (20) : Il existe une base q-orthogonale.

[Gou] Rq (21) : Si $\mathcal{B}=(e_1 \dots e_n)$ est q-orthogonale, alors $q=\sum_{i=1}^{n} q(e_i)(e_i^*)^2$.
232 La méthode de réduction de Gauss permet d'écrire q sous cette forme à partir de l'expression de q comme polynôme homogène de degré 2.

[Gri] Ex. (22) : $q : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1^2+3x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+8x_2x_3$
308 [ANNEXE].

2) Classification sur $\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{F}_q$

[Gri] 308 Th. (23) : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Si $\mathrm{rg}(q)=r$, alors : $\exists \mathcal{B} \,/\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

309 Th. (24) : (Sylvester) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Soit $r=\mathrm{rg}(q)$. $\exists\, 0 \leq p \leq r, \mathcal{B} \,/\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
De plus, p ne dépend que de q et $(p, r-p)=\mathrm{sgn}(q)$ est appelé signature de q.

[Per] Th. (25) : $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$, où $\mathbb{F}_q$ est un corps fini. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, $\alpha \notin \mathbb{F}_q^{*2}$.
130 Pour toute forme quadratique Q non dégénérée, il existe $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, Q = I_n$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$, selon que $\delta(Q)=1$ ou $\delta(Q)=\alpha$.

[NH2G2] 303 **Appli. (26)** : (loi de réciprocité quadratique)
Soient p, q deux nombres premiers impairs.
DVP Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}}$ (où $\left(\frac{p}{q}\right)=p^{\frac{q-1}{2}}\,[q]$)

Rq (27) : Les théorèmes 23, 24 et 25 nous donnent un invariant total pour l'action par congruence de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F}_q$)

3) Sous-espaces orthogonaux [Gri]

Cadre : q est une forme quadratique de forme polaire φ. 3-1-1

Déf. (28) : Soit $A \subset E$. L'orthogonal de A (pour q) est :
$A^{\perp}=\{x \in E \,/\, \forall a \in A,\ \varphi(x,a)=0\}$.

Prop. (29) : 1) $A^{\perp}$ est un sev de E 2) $\{0\}^{\perp}=E$
3) $E^{\perp}=\mathrm{Ker}\, q$ 4) $\forall A \subset E$, $\mathrm{Ker}\, q \subset A^{\perp}$

Lemme (30) : Soit $j : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ y \longmapsto \varphi(\cdot,y) \end{array}$ et F un sev de E. Alors $j(F)^{\circ}=F^{\perp}$

Prop. (31) : Soit F un sev de E. Alors
1) $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim(F \cap \mathrm{Ker}\, q)$ 2) $F^{\perp\perp}=F+N$.

Déf (32) : Un sev F de E est dit isotrope si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$, anisotrope sinon. 3-1-2

Prop. (33) : $E=F \oplus F^{\perp} \iff F$ est anisotrope

III. Groupe orthogonal. Cas euclidien

1) Groupe orthogonal [Gri]

Cadre : E est muni d'une forme quadratique q non dégénérée de forme polaire φ.

Déf./Prop. (34) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : 315
$\exists!\, f^* \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall x,y \in E,\ \varphi(f(x),y)=\varphi(x,f(y))$.
f^* est appelé l'adjoint de f (relativement à q)

Déf./Prop. (35) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes : 316
1) $q(f(x))=q(x)\ \forall x \in E$ 2) $\varphi(f(x),f(y))=\varphi(x,y)\ \forall x,y \in E$ 3) $f^* \circ f = id$
f est alors appelé un endomorphisme orthogonal (relativement à q).
On a alors $f \in GL(E)$ et $\det f \in \{\pm 1\}$. 317

Déf. / Prop. 36 : On note $O(q)$ l'ensemble des endomorphismes q-orthogonaux. $(O(q), \circ)$ est un groupe appelé groupe q-orthogonal. 317
$SO(q) = \{ f \in O(q) \,/\, \det f = 1 \}$ est un sous-groupe de $O(q)$ appelé groupe spécial orthogonal.

[Per] Notation 37 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, i.e. $u^2 = id$, on notera $E^+ = \mathrm{Ker}(u - id)$ et $E^- = \mathrm{Ker}(u + id)$.
125 Prop. 38 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors $u \in O(q)$ ssi $E^+ = (E^-)^\perp$

2) Formes quadratiques dans un espace euclidien

Cadre : $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien. $O(E) = O(\langle , \rangle)$ et $SO(E) = (\langle , \rangle)$

On notera bon pour base orthonormée. Le théorème spectral a deux corollaires

[Gou] Coro 39 : Soit q une forme quadratique de E. Alors il existe une bon de E qui est q-orthogonale
~ 245 Coro. 40 : (orthogonalisation ou pseudo-réduction simultanée)

Soit q une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = I_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q' = D \quad \text{où } D \text{ est diagonale.}$$

[FGN3] Lemme 41 : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$
229 Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$, et l'inégalité est stricte si $A \neq B$.
DVP Appli. 42 : (ellipsoïde de John-Loewner)

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

[Ber] Th. 43 : 1) $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales
102 2) Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements
[Per] Rq 44 : Toujours vrai pour $O(q)$ si q est non dégénérée
187
188

IV. Applications en analyse

Cadre : $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application. [Rou]

Th. 45 : (Schwarz)

Si f est deux fois différentiable en $x \in U$, alors $d^2 f(x)$ est une forme bilinéaire symétrique. 294

Th. 46 : Soit $a \in U$ un point critique de f, i.e. $df(a) = 0$.

1) Si f admet un minimum local en a et si f est deux fois différentiable en a, alors $d^2 f(a)$ est positive. 371

2) Si f est deux fois différentiable en a et $d^2 f(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en a.

Ex. 47 : $f(x,y) = x^2 + y^3$ admet-elle un extremum local en $(0,0)$? 379

Th. 48 : (Lemme de Morse) 209

On suppose $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, $0 \in U$, $df(0) = 0$ et $d^2 f(0)$ est non dégénérée. Il existe alors $\varphi : x \mapsto u$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que 354 DVP

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad \text{où } (p, n-p) = \mathrm{sgn}\,(d^2 f(0))$$

Appli. 49 : Le lemme de Morse peut servir à étudier la position d'une surface par rapport à son plan tangent en un point $(a, f(a))$. 341

ANNEXE

Ex. 22 :

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$$
$$= (x_1+x_2)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 8x_2x_3$$
$$= (x_1+x_2)^2 + 2(x_2^2 + 4x_2x_3) + 7x_3^2$$
$$q(x_1,x_2,x_3) = \underbrace{(x_1+x_2)}_{e_1^*(x_1,x_2,x_3)}{}^2 + 2\underbrace{(x_2+2x_3)}_{e_2^*(x_1,x_2,x_3)}{}^2 - \underbrace{x_3}_{e_3^*(x_1,x_2,x_3)}{}^2$$

$\mathrm{rg}(q) = 3 \quad \mathrm{sgn}(q) = (2,1)$

Références :

- [Gri] Grifone, *Algèbre linéaire* (4e éd.)
- [Per] Perrin, *Cours d'algèbre*
- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2e éd.)
- [Gou] Gourdon, *Algèbre* (2e éd.)
- [Rou] Rouvière, *PGdCD* (4e éd.)
- [FGN3] Francinou, *Oraux X-ENS Algèbre 3*